



## L' Infinito nella Matematica

---

*Da tempo immemorabile l'infinito ha suscitato le passioni umane più di ogni altra questione, l'obiettivo di questa tesina è esaminare il concetto matematico di infinito affrontando la sua storia per "problemi".*

---

### **I NUMERI NATURALI**

E' a partire dai numeri naturali che si è sviluppata nel tempo la matematica e quindi è utile cominciare il discorso analizzando quale concetto di infinito sia connesso con questo insieme.

Sappiamo che la successione crescente dei numeri naturali è infinita perché *fissato comunque un numero naturale è sempre possibile trovare un numero maggiore di esso.*

Quindi, aggiungendo sempre 1 all'ultimo numero determinato, si ottiene una successione infinita.

Questo tipo di infinito si dice "*potenziale*" e viene chiamato "*infinito per aggiunzione*" o, come lo definì Kant, "*progressus in indefinitum*".

### **I NUMERI RAZIONALI**

Mentre l'insieme degli interi positivi è un insieme discreto (tra due elementi consecutivi c'è il vuoto), l'insieme dei numeri razionali è *denso*: tra due numeri razionali, per quanto vicini, ce ne sono infiniti maggiori del più piccolo e minori del più grande; ad esempio sono infiniti tutti i razionali compresi tra 0 e 1, essi sono rappresentati da tutte le frazioni aventi il numeratore più piccolo del denominatore.

L'infinito potenziale espresso dai numeri razionali è perciò un infinito che è interamente contenuto in una totalità limitata e per questo fu definito da Kant "*regressus in infinitum*".

## LA MATEMATICA GRECA E L'INFINITO

Il concetto di infinito nella filosofia greca fu accettato solo in quanto *divenire*, quindi esclusivamente come infinito potenziale.

Il rifiuto dell'infinito attuale nasce dal fatto che i greci ritenevano conoscibile solo ciò che è determinato e finito; tutto ciò che è indeterminato, infinito e perciò inconoscibile è quindi da rifiutare al punto che, non solo viene respinta l'idea dell'infinito attuale, ma si accetta l'infinito potenziale solo come *processo di ecceterazione*, cioè come possibilità di procedere sempre oltre, procedendo un passo alla volta, ottenendo ad ogni passo quantità sempre più grandi, ma comunque finite.

E' utile quindi ora soffermarsi su tre grandi problemi che misero in crisi i matematici greci ed il loro modo di concepire l'infinito: la scoperta dei segmenti incommensurabili, i paradossi di Zenone e la rettificazione della circonferenza.

- PITAGORA E I SEGMENTI INCOMMENSURABILI

Uno dei dogmi del pitagorismo era stata la concezione secondo cui i corpi fossero costituiti da corpuscoli tutti uguali tra loro e disposti in forme geometriche. Questa convinzione portava a ritenere che i punti avessero una estensione, sia pur piccolissima.

Da ciò essi deducevano che un segmento dovesse essere formato da un *numero finito di punti* e che quindi il punto fosse il sottomultiplo comune a tutti i segmenti. Questo implica che tutti i segmenti siano tra loro *commensurabili*, cioè che esiste una grandezza a loro omogenea che è contenuta un numero intero di volte in ciascuno di essi. Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele essi furono però costretti ad ammettere l'esistenza di grandezze incommensurabili: scoprirono infatti l'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto ad un suo lato.

Definizione: Due segmenti  $a$  e  $b$  si dicono "incommensurabili" se non hanno nessun sottomultiplo comune.

TEOREMA: Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili, ossia non esiste nessun segmento che sia un loro sottomultiplo comune.

Dimostrazione (con riferimento alla figura sottostante)

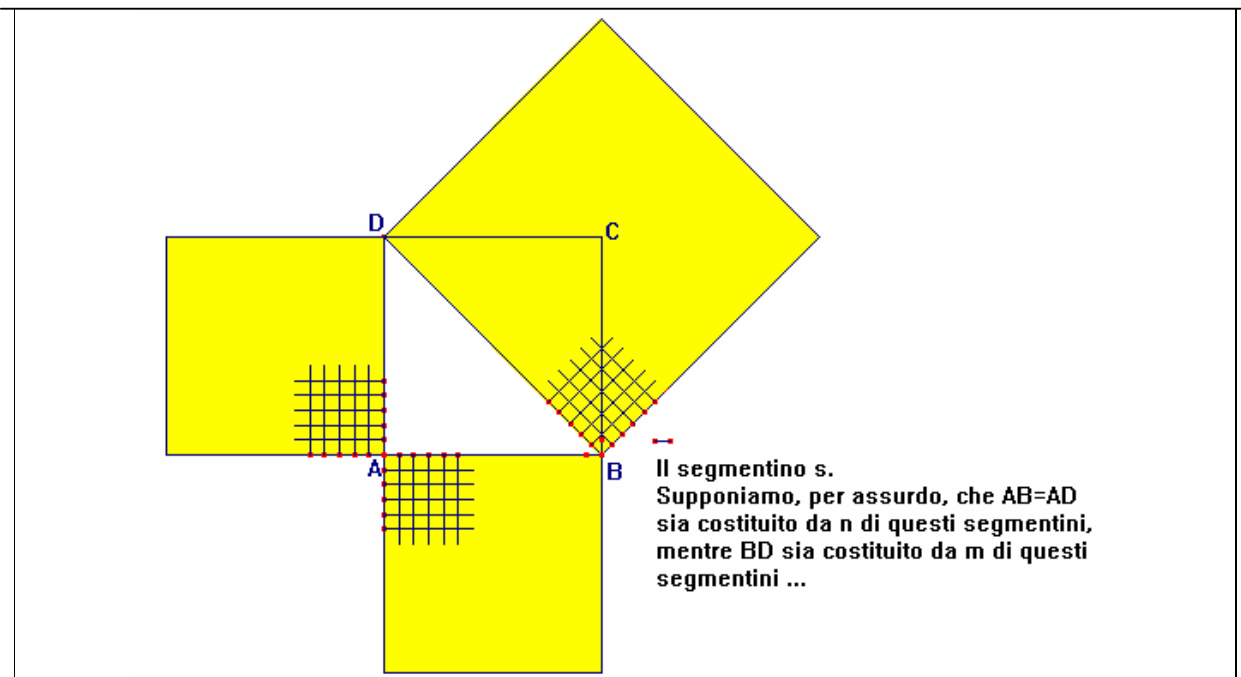
Se, per assurdo, esistesse un sottomultiplo  $s$  del lato  $AB$  del quadrato  $ABCD$ , contenuto un numero esatto di volte nella diagonale  $BD$  dello stesso quadrato, allora esisterebbero due numeri interi  $n, m$ , tali che  $AB = ns$  ;  $BD = ms$  .

I quadrati costruiti sui lati uguali  $AB$  e  $AD$  potrebbero allora essere suddivisi ciascuno in una griglia di  $n^2$  quadratini di lato  $s$ , mentre il quadrato costruito sulla diagonale  $BD$  potrebbe essere suddiviso in una griglia di  $m^2$  quadratini di lato  $s$ .

D'altra parte per il Teorema di Pitagora, il quadrato costruito su  $BD$  è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su  $AB$  e  $AD$ , e questo comporta che la somma del numero di quadratini che "piastrellano" i due quadrati costruiti su ciascuno dei due lati  $AB$  e  $AD$ , sia uguale al numero dei quadratini che "piastrellano" il quadrato costruito sulla diagonale  $BD$ .

Dunque si avrà  $n^2 + n^2 = m^2$  ossia  $2n^2 = m^2$  per cui gli interi  $n$  ed  $m$  saranno tali che  $\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

Ma, come dimostreremo qui di seguito, non può esistere alcuna frazione (=rapporto di due interi) che elevata al quadrato dia come risultato 2.



TEOREMA (Non esiste nessuna frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2)

Dimostrazione

Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee,  $\frac{m}{n}$  tale frazione, avremo  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ .

Riduciamo la frazione  $\frac{m}{n}$  ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione  $\frac{p}{q}$ , con p e q primi fra loro, tale che  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \rightarrow$  il numero  $p^2$  è pari  $\rightarrow p$  è PARI  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  esiste un INTERO  $p'$  tale che  $p = 2p' \rightarrow (2p')^2 = 2q^2 \rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \rightarrow$   
 $q^2 = 2p'^2 \rightarrow$  il numero  $q^2$  è pari  $\rightarrow q$  è PARI

Ma nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2, mentre avevamo supposto che la frazione  $\frac{p}{q}$  fosse ridotta ai minimi termini, vale a dire non più semplificabile. Siamo cioè giunti ad un assurdo.

Ho quindi dimostrato che il lato  $l$  del quadrato e la sua diagonale  $d$  sono segmenti incommensurabili e pertanto il rapporto  $\frac{l}{d}$  è espresso mediante un numero decimale illimitato aperiodico (se fosse periodico sarebbe riducibile a frazione) che viene chiamato *numero irrazionale*.

I numeri irrazionali sembravano contraddire la verità per cui nulla esiste se non ciò che è attuale, infatti, pur sembrando sprovvisto di un'esistenza attuale (non si conoscono tutte le sue cifre), esso rappresenta indubbiamente "qualcosa".

- ACHILLE E LA TARTARUGA

Uno dei più famosi paradossi dell'infinito potenziale è quello di "Achille e la tartaruga" sviluppato da Zenone di Elea nel 500 a.C.

Supponiamo che Achille sia due volte più veloce della tartaruga e che entrambi gareggino lungo un percorso di un metro. Supponiamo inoltre che Achille dia mezzo metro di vantaggio alla tartaruga.

Quando Achille avrà percorso mezzo metro, la tartaruga si troverà più avanti di Achille di un quarto di metro; quando Achille avrà percorso quel quarto, la tartaruga si troverà avanti di un ottavo di metro e così via all'infinito, cioè *Achille non raggiungerà mai la tartaruga*.

Se osserviamo il percorso di Achille troviamo che esso è dato da infiniti tratti che costituiscono la successione

$$\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}; \quad \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}; \quad \dots ; \quad \frac{(2^n - 1)}{2^n}$$

ed è facile osservare che questa successione *tende a 1*

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n - 1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 1 \right) \text{ oppure "tramezzino infinito" } .$$

cioè, per quanto grande sia n, si avvicina sempre di più a 1 senza però raggiungerlo mai. La differenza tra 1 e la somma dei primi n tratti percorsi da Achille, per n opportunamente grande, si fa più piccola di un qualsiasi numero, per quanto piccolo, da noi scelto. E' questa la proprietà caratteristica del *limite* definito nell'Ottocento da Weierstrass.

- LA RETTIFICAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Il problema della rettificazione della circonferenza ha appassionato molti eminenti filosofi dell'antica Grecia. Fu Eudosso di Cnido (400 – 350 a.C.) che ne trovò la soluzione grazie al suo "*Metodo di esaustione*" basato sul seguente Lemma:

date due grandezze aventi un certo rapporto (nessuna delle quali sia zero) è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra.

I matematici precedenti, come ad esempio Antifonte, avevano suggerito di inscrivere nella circonferenza poligoni con un numero di lati sempre crescente in modo tale che ogni lato approssimasse sempre di più l'arco di circonferenza sotteso e che quindi il perimetro

del poligono approssimasse sempre di più la lunghezza della circonferenza. Aristotele però affermò che per ogni poligono con un certo numero di lati ne esisterà sempre un altro con un numero di lati ancor più elevato e così via in un processo di ecceterazione in cui ripropone il concetto di infinito inteso come “potenziale”.

Il metodo di esaustione di Eudosso permise ad Archimede (287-212, Siracusa) di provare, non coinvolgendo l’infinito, che *l’area  $A_C$  del cerchio è uguale all’area  $A_T$  del triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio.*

Consideriamo i poligoni inscritti nel cerchio; all’aumentare del numero  $n$  dei lati l’area  $A_{p_n}$  del poligono *si avvicina* sempre di più all’area del cerchio e quindi:

**per ogni  $\varepsilon$ , quantunque piccolo, esisterà un poligono inscritto, di area  $A_{p_n}$ , tale che  $A_C - A_{p_n} < \varepsilon$ .**

Si supponga per assurdo che  $A_C > A_T$ .

Posto  $\varepsilon = A_C - A_T$ , esisterà un poligono inscritto di area  $A_{p_n}$ , tale che

$$A_C - A_{p_n} < \varepsilon = A_C - A_T$$

Sarà allora  $A_T < A_{p_n}$ .

Sapendo che in un poligono regolare avente apotema  $a$  e semiperimetro  $p$  l’area è  $A = pa$ , possiamo arrivare facilmente ad un assurdo. Infatti il poligono inscritto avrà sicuramente apotema minore del raggio e perimetro minore della circonferenza; e quindi anche  $A_{p_n} < A_T$  e ciò è un assurdo.

In modo analogo si procede considerando i poligoni circoscritti e supponendo per assurdo  $A_T > A_C$ .

## **GALILEI E L’INFINITO**

Il primo a mettere in discussione il concetto di infinito così come era stato elaborato dalla filosofia greca fu Galileo Galilei (1564-1642).

Egli osservò che un segmento può essere diviso in quante si vuole parti ancora divisibili e che quindi esso è necessariamente composto da infinite parti; tali parti però, poiché il segmento ha un’estensione limitata, devono essere prive di estensione, perché altrimenti infinite parti estese avrebbero un’estensione infinita.

Consideriamo ora due dei paradossi proposti da Galilei: Il paradosso dei quadrati e Il paradosso della ruota.

- IL PARADOSSO DEI QUADRATI

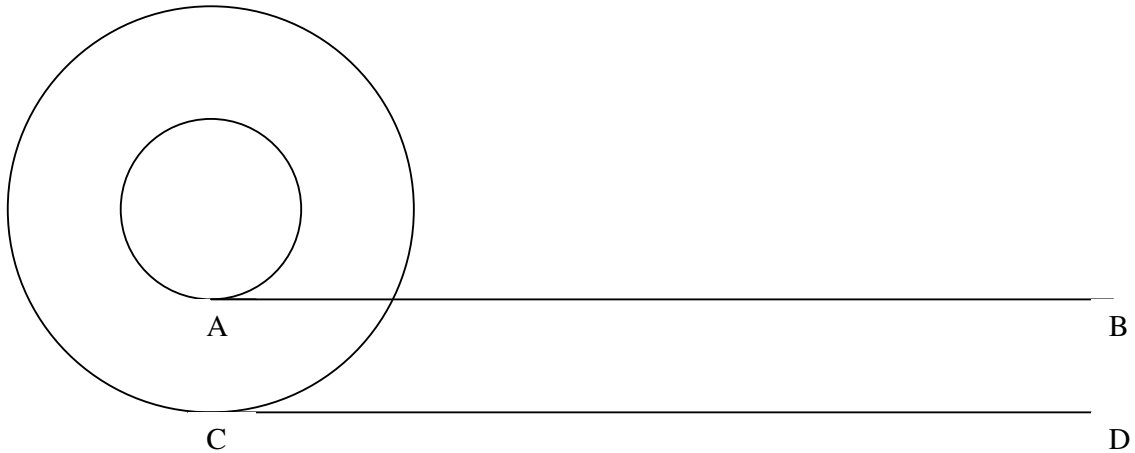
I quadrati sono solo una parte dei numeri naturali, è però possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{N}$  e l'insieme dei quadrati, cioè una corrispondenza nella quale ad ogni numero naturale corrisponda uno ed un solo quadrato

1	2	3	4	5	6	7	8	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	25	36	49	64	...

I quadrati sono perciò tanti quanti i numeri naturali e ciò significa che una parte può essere “uguale” al tutto.

- IL PARADOSSO DELLA RUOTA

Due ruote concentriche tali che la più grande rotoli sopra una retta, toccano con i loro punti due segmenti di uguale lunghezza.



Facendo fare un giro completo alla circonferenza più grande fino a D, la più piccola arriverà al punto B. Ma  $CD=AB$ .

Anche in questo caso ciò è dovuto alla possibilità di costruire una corrispondenza biunivoca tra la circonferenza più grande e quella più

piccola (e quindi tra un segmento e una sua parte propria) :basterà infatti proiettare dal comune centro i punti della circonferenza più piccola su quelli della più grande. Il paradosso sta dunque nella possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra un segmento e una sua parte propria.

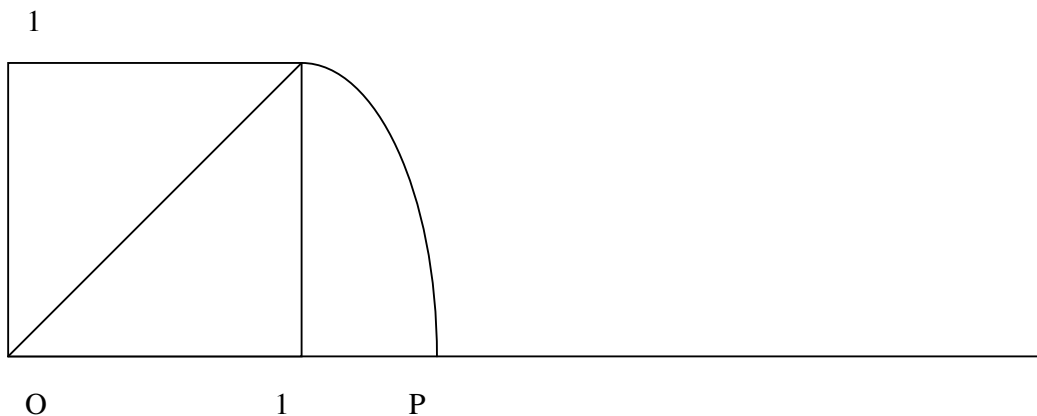
Galileo non riuscì a trovare una soluzione ai suoi paradossi e questo fatto lo portò a negare, come matematico, la possibilità di indagare l'infinito.

### **LE SEZIONI DI DEDEKIND**

R. Dedekind nel 1872 affrontò e risolse come due aspetti di uno stesso problema le due grandi questioni che avevano messo in crisi l'infinito potenziale aristotelico: i numeri irrazionali e il "continuo".

Egli si chiese che cosa caratterizzasse il continuo rispetto ai razionali.

Galilei e Leibnitz avevano affermato che la continuità dei punti di una retta fosse dovuta alla loro densità, cioè al fatto che tra due punti qualsiasi esiste sempre un terzo punto. Tuttavia i razionali, pur godendo di questa proprietà, non formano un continuo, cioè non è possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri razionali; basta pensare al caso del punto P del seguente disegno la cui distanza da O è pari alla lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1, che come è noto, è  $\sqrt{2}$ .



Per definire quindi i numeri "mancanti" e creare una corrispondenza biunivoca con la retta Dedekind basò il suo procedimento sulla definizione



di “sezione”. Supponiamo dato un metodo per dividere l’insieme dei numeri razionali in due classi,  $A$  e  $B$ , tali che ogni elemento  $b$  della classe  $B$  sia maggiore di ogni elemento  $a$  della classe  $A$ . Ogni divisione in classi di questo genere si definisce come una *sezione* nell’insieme dei numeri razionali. Per ogni sezione vi sono esattamente tre possibilità, una ed una sola delle quali deve valere:

- 1) *A* contiene un elemento  $a^*$  maggiore di tutti gli altri.  
(es.  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 1\}$  ;  $B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 1\}$  )
- 2) *B* contiene un elemento  $b^*$  minore di tutti gli altri.  
(es.  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$  ;  $B = \{b \in \mathbb{Q} : b \geq 1\}$  )
- 3) *A* non contiene un elemento maggiore di tutti gli altri, né *B* un elemento minore di tutti gli altri (in questo caso la sezione definisce, o semplicemente è, un numero irrazionale).  
(es.  $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$  ;  $B = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 > 2\}$   $\rightarrow$  *A e B insieme comprendono tutti i numeri razionali, poiché abbiamo dimostrato che non esiste nessun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.*)

Il caso in cui  $A$  ha un massimo elemento  $a^*$  e  $B$  un minimo elemento  $b^*$  non è possibile, perché allora il numero razionale  $\frac{(a^*+b^*)}{2}$ , che è medio fra  $a^*$  e  $b^*$ , sarebbe maggiore del massimo elemento di  $A$  e minore del minimo elemento di  $B$ , e quindi non potrebbe appartenere né ad  $A$  né a  $B$ .

Quindi Dedekind stabilì che l’essenza della continuità non sta tanto nella densità dei suoi punti, quanto nella particolare natura della divisione di un segmento in due parti mediante un punto giacente su di esso: in qualsiasi divisione di un segmento (o di una retta) in due classi tali che ciascun punto appartenga ad una ed una sola classe e che ogni punto della prima classe si trova a sinistra di ciascun punto dell’altra, c’è *uno ed un solo punto che determina la divisione*. Tale punto è quindi univocamente determinato dalla coppia  $(A,B)$  ma non sempre una tale coppia che sia una sezione di razionali individua un razionale; ogni volta che ciò accade il numero individuato è un *irrazionale*.

## CANTOR E I PARADOSSI DELL'INFINITO ATTUALE

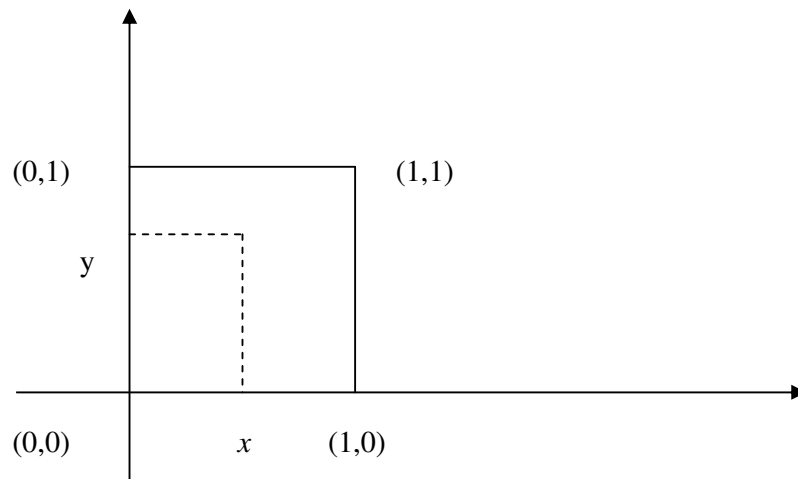
Cantor (1845-1918 Pietroburgo) risolse i paradossi che avevano fermato Galilei osservando che gli insiemi infiniti potevano essere messi in corrispondenza biunivoca con una loro parte propria.

Vediamo ora qualche esempio:

### A. Un quadrato di lato unitario ha tanti punti quanto un suo lato

Si tratta di costruire una corrispondenza biunivoca tra i punti del quadrato ed i punti di un suo lato.

Su un sistema di riferimento cartesiano sia  $Q$  un quadrato di vertici  $(0,0)$ ;  $(0,1)$ ;  $(1,1)$ ;  $(1,0)$ .



Un punto generico  $P$  del quadrato avrà coordinate  $(x,y)$  dove  $0 \leq x, y \leq 1$ , cioè possono essere scritti in forma decimale:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

dove  $a_i$  e  $b_i$  sono cifre comprese tra 0 e 9 (ad esempio 0,97563); ci sono allora due possibilità:

- $x$  ed  $y$  sono numeri razionali (cioè numeri decimali con parte decimale finita o periodica)

- $x$  ed  $y$  sono numeri irrazionali (cioè numeri decimali con parte decimale infinita e non periodica)

Alla coppia ordinata  $(x,y)$ , che *identifica univocamente* il punto  $P$ , si può far corrispondere il numero reale compreso tra 0 e 1

$$t = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

che identifica univocamente un punto del lato del quadrato.

Viceversa, ad un qualunque punto del lato cui corrisponde univocamente il numero

$$t = 0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \dots$$

si può far corrispondere la coppia ordinata

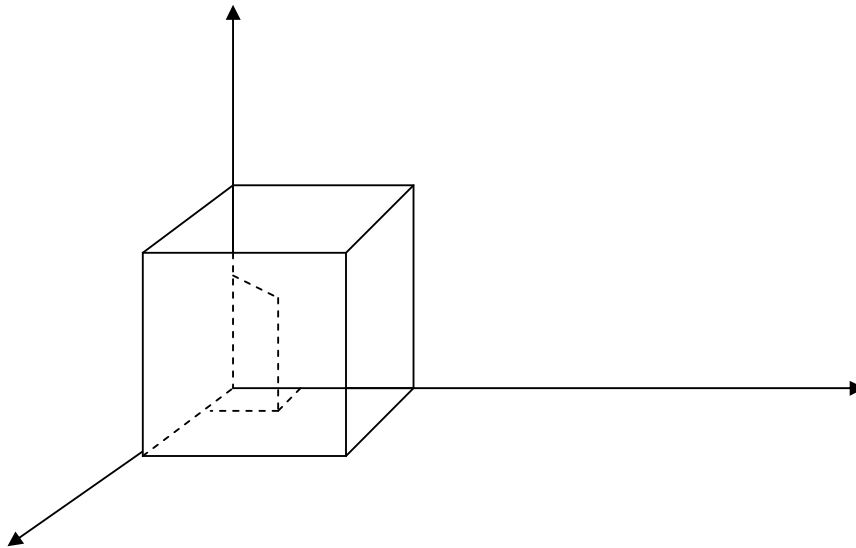
$$x = 0, t_1 t_3 t_5 \dots$$

$$y = 0, t_2 t_4 t_6 \dots$$

che individua un punto del quadrato.

La corrispondenza biunivoca tra i punti del quadrato e i punti di un suo lato è così costruita e l'affermazione iniziale è perciò dimostrata.

**B. Un cubo di lato unitario ha tanti punti quanti un suo lato**



Analogamente a quanto visto sopra ad un punto  $P$  del cubo corrisponde una terna di punti  $(x,y,z)$  con  $x, y, z$  compresi 0 e 1.

Siano perciò

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

si può allora far corrispondere ad essi il punto

$$t = 0, a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 a_3 b_3 c_3 \dots$$

anche esso compreso tra 0 e 1.

Viceversa al punto

$$t = 0, t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \dots$$

si può far corrispondere il punto del cubo di coordinate

$$x = 0, t_1 t_4 \dots$$

$$y = 0, t_2 t_5 \dots$$

$$z = 0, t_3 t_6 \dots$$

ed anche in questo caso si è costruita una corrispondenza biunivoca tra tutto il cubo ed un suo lato.

Quindi abbiamo dimostrato che *segmento, quadrato e cubo sono equipotenti fra loro* e che quindi *la dimensionalità non costituisce un criterio per stabilire la potenza di un insieme.*

## **I NUMERI TRANSFINITI**

L'idea dominante fino a Cantor era stata che se l'infinito esiste allora è unico, cioè è l'assoluto oltre il quale non si può andare.

Cantor dimostrò invece che esistono *infiniti più grandi e infiniti più piccoli.*

*Def.* Un insieme si dice *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali  $N$ , cioè se è un insieme equipotente ad  $N$ . Tale potenza si dice *potenza del numerabile* o  $\aleph_0$  (*Aleph con zero*).

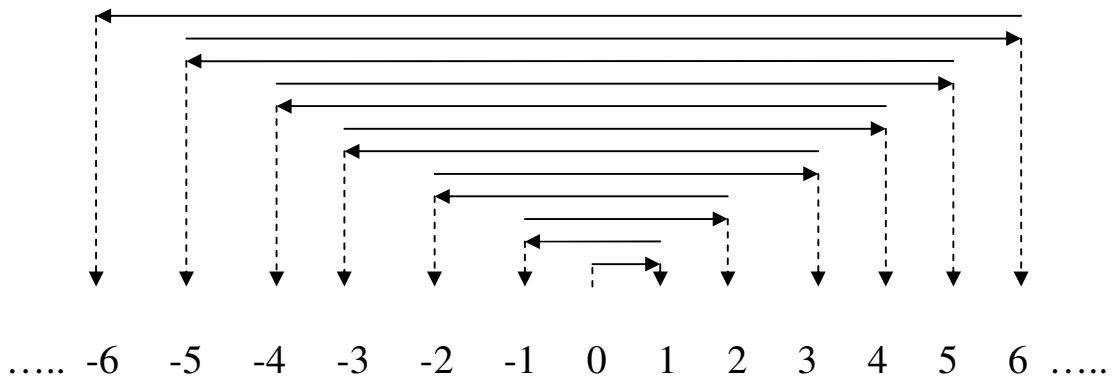
*Cantor dimostrò che i numeri interi e i numeri razionali sono insiemi numerabili:*

**1. I numeri interi sono un insieme numerabile**

Per stabilire una corrispondenza biunivoca tra  $N$  e  $Z$  basterà ordinare gli elementi di  $Z$  in modo opportuno:

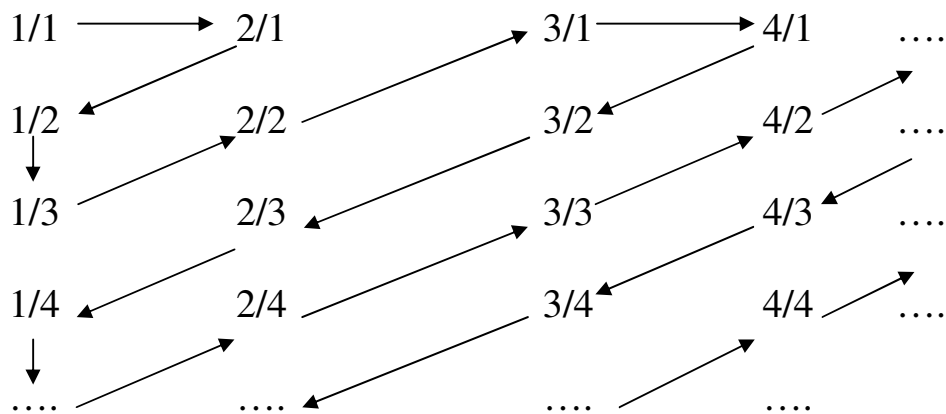
0	1	2	3	4	5	6	....
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	-1	2	-2	3	-3	

oppure anche con una corrispondenza a “tergicristallo” :



**2. I numeri razionali sono un insieme numerabile**

Anche in questo caso basterà ordinare i razionali in modo adeguato, tenendo conto tra l'altro che non esiste un ordinamento naturale, cioè secondo grandezza, per le frazioni visto che tra due razionali se ne può sempre trovare un altro. Un possibile modo è il seguente:



Si potrà quindi costruire una corrispondenza biunivoca tra  $Q$  ed  $N$  nel modo seguente:

1	2	3	4	5	....
↓	↓	↓	↓	↓	
1/1	2/1	1/2	1/3	2/2	....

Ma non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili: nel 1873 Cantor dimostrò l'esistenza dell'infinito attuale transfinito. Infatti, ad esempio, *l'insieme dei punti di un segmento non è numerabile*:

consideriamo il segmento di estremi 0 e 1 e supponiamo per assurdo che i punti in esso contenuti, ciascuno identificato con un numero reale, siano un insieme numerabile; essi allora potranno essere espressi come numeri decimali e potranno essere ordinati secondo l'ordine numerabile:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}....$$

$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}....$$

$$....$$

ma allora il numero

$$b = 0, b_1b_2b_3....$$

tale che

$$b_k = 9 \quad \text{se} \quad a_{kk} = 1 \quad \text{e} \quad b_k = 1 \quad \text{se} \quad a_{kk} \neq 1$$

è diverso da tutti quelli elencati ed è compreso tra 0 e 1, contro l'ipotesi di aver elencato tutti i numeri reali tra 0 e 1.

Conseguenza di ciò è che i punti di un segmento sono più dei naturali, cioè più di  $\aleph_0$ . Essi saranno  $\aleph_1$  (con  $\aleph_0 < \aleph_1$ ) ed  $\aleph_1$  (*Aleph con uno*) si chiamerà *potenza del continuo*.

### TEOREMA

Dato un insieme  $A$  di  $n$  elementi, tale cioè che  $|A| = n$ , l'insieme delle sue parti, ossia l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di  $A$ , in simboli  $P(A)$ , avrà  $2^n$  elementi, cioè

$$|P(A)| = 2^n$$

Dimostrazione (per induzione)

Base dell'induzione:  $|A|=0 \Leftrightarrow A=\emptyset$

$\Rightarrow P(A)=\{\emptyset\}$  quindi  $|P(A)|=2^0=1$ .

Ipotesi induttiva: suppongo che se  $|A|=k$  allora  $|P(A)|=2^k$ .

Tesi: dimostro che se  $|A|=k+1$  allora  $|P(A)|=2^{k+1}$ .

Sia  $|A|=k+1$ . Scelgo  $x_0 \in A$  e considero l'insieme  $A' = A \setminus \{x_0\}$ .

Se  $S$  è un insieme tale che  $S \subseteq A$  allora ho 2 casi :

1)  $x_0 \in S \rightarrow S \setminus \{x_0\} \subseteq A'$

2)  $x_0 \notin S \rightarrow S \subseteq A'$

I sottoinsiemi di  $A$  si ottengono come  $P(A') \cup \{S \mid S = T \cup \{x_0\}\}_{T \in P(A')}$

$\Rightarrow$  in tutto ho  $2 \cdot |P(A')| = 2 \cdot 2^k$  cioè  $2^{k+1}$ .

Conseguenza di ciò è che l'insieme delle parti di  $P(A)$  avrà allora  $(2)^{2^n}$  elementi e così via. E' questo dunque il metodo per costruire insiemi di potenza via via crescente all'infinito; partendo dai naturali avremo:

$$|N| = \aleph_0 \qquad |P(N)| = 2^{\aleph_0} \qquad |P(P(N))| = 2^{2^{\aleph_0}} \qquad \dots$$

Cantor riuscì così a dimostrare l'esistenza di *infiniti numeri transfiniti* maggiori di  $\aleph_0$ .

Egli dimostrò inoltre che  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , cioè che *la potenza del continuo ha la stessa cardinalità dell'insieme delle parti di  $N$* .

A questo punto, è spontaneo porsi il problema: esistono insiemi infiniti non equipotenti né a  $\mathbf{N}$  né a  $\mathbf{R}$ ?

La matematica contemporanea ha dato risposta affermativa a questa domanda: è possibile costruire un numero qualsiasi di altri insiemi infiniti aventi potenze sempre diverse (intuitivamente, sempre più "numerose"). La potenza del numerabile  $\aleph_0$  (*Aleph con zero*) e la potenza del continuo  $\aleph_1$  (*Aleph con uno*) sono detti *numeri transfiniti*; è possibile definire i transfiniti  $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$  : l'insieme dei transfiniti è, a sua volta, infinito.

Ma esistono numeri transfiniti compresi tra  $\aleph_0$  e  $\aleph_1$ ? Esiste cioè un insieme infinito  $I \subseteq \mathbf{R}$  che non abbia né la potenza del numerabile né

la potenza del continuo? Non è stata data una risposta a questa domanda; in particolare, è stata formulata la seguente ipotesi:

***Ogni sottoinsieme infinito di  $\mathbf{R}$  non avente la potenza del numerabile ha la potenza del continuo.***

Essa, detta ***ipotesi del continuo***, equivale a negare l'esistenza di transfiniti intermedi tra  $\aleph_0$  e  $\aleph_1$ .

Nel 1962, Paul Joseph Cohen (nato nel 1934) dimostrò che l'ipotesi del continuo appartiene ad una particolare classe di questioni, denominate *indecidibili*.

## **LE ANTINOMIE**

La teoria di Cantor fece esplodere nuove, clamorose antinomie. Ne prendo qui in considerazione due: *l'antinomia di Russel* e *l'antinomia di Cantor*.

### **1. ANTINOMIA DI RUSSEL**

Riproponiamo qui una semplice storiella che rende molto semplice la comprensione di tale antinomia.

In un villaggio dove vive un unico barbiere è emanata un'ordinanza che

- vieta agli uomini di farsi crescere la barba
- precisa che il barbiere, e soltanto lui, è autorizzato e obbligato a fare la barba *solo a coloro che non si radono da soli*.

#### **Chi fa la barba al barbiere?**

Suddividiamo gli abitanti del paese in due insiemi :

- 1) A, avente per elementi gli abitanti che si fanno la barba da soli
- 2) B, avente per elementi gli abitanti che vanno a radersi dal barbiere

In quale di questi insiemi si può inserire il barbiere?



- Il barbiere **deve appartenere all'insieme A** (perché si fa la barba da solo) e allo stesso tempo **non può appartenere all'insieme A** (perché lui stesso è il barbiere e quindi si sta facendo radere dal barbiere...)
- Il barbiere **deve appartenere all'insieme B** (perché essendo lui stesso il barbiere, mentre si rade, si sta facendo fare la barba dal barbiere..) e **non può appartenere all'insieme B** (perché si fa la barba da solo)

## 2. ANTINOMIA DI CANTOR (O DELLA CLASSE TOTALE)

Si consideri la totalità degli insiemi, la “classe totale”  $A$ , che potremmo chiamare l'insieme di tutti gli insiemi. Sia allora  $P(A)$  l'insieme delle parti di  $A$ . Per quanto precedentemente visto  $P(A)$  dovrebbe avere potenza maggiore di  $A$ , ma essendo  $A$  l'insieme di tutti gli insiemi, esso contiene  $P(A)$  come suo elemento, quindi  $P(A)$  dovrebbe avere cardinalità non maggiore di quella di  $A$ .

Queste antinomie determinarono una *crisi dei fondamenti della matematica* che scosse il mondo matematico all'inizio secolo e determinò la nascita di diverse concezioni circa la natura della matematica.

Nel 1931 Godel provò che all'interno del sistema esistono certe asserzioni ben precise che non possono essere né dimostrate, né invalidate nell'ambito degli assiomi del sistema; perciò, usando i metodi convenzionali, non si può essere certi che gli assiomi dell'aritmetica non portino a contraddizioni.

Nasce così il Metodo Assiomatico moderno secondo cui ad ogni interpretazione degli enti primitivi corrisponde un modello concreto della teoria assiomatica. L'assunzione del Metodo Assiomatico moderno comporta la perdita dell'unità: non esiste più la Matematica, ma esistono le Matematiche, ma d'altro canto apre nuovi vastissimi campi di ricerca e quindi nuove prospettive di progresso sia nel pensiero matematico che, conseguentemente, del pensiero scientifico e del pensiero umano in generale.

# “L’infinito nella geometria”

## I POSTULATI DI EUCLIDE

### *Il primo postulato*

Si postula:

Che da qualsiasi punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto



### *Il secondo postulato*

Si postula:

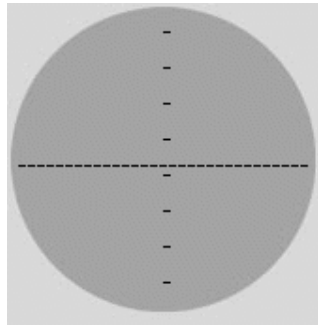
che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente per dritto;



## ***Il terzo postulato***

Si postula:

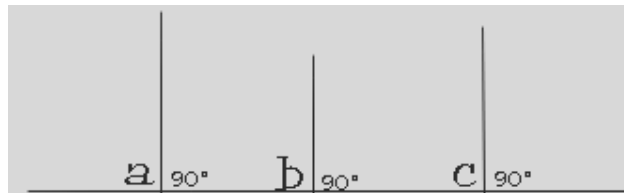
che con ogni centro e ogni distanza si possa scrivere un cerchio



Si postula:

## ***Il quarto postulato***

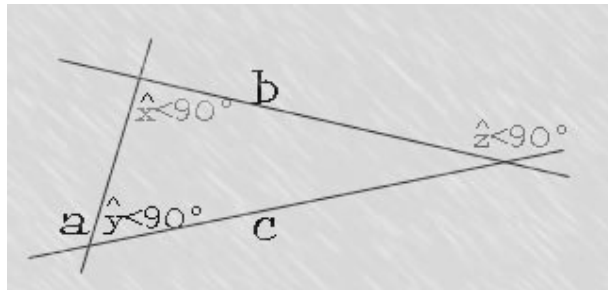
che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro



## *Il quinto postulato*

Si postula:

che se una retta(a), incontrandone altre due(b-c), forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due retti,(x e y) le due rette,(b-c) prolungate all'infinito, si incontrino dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti.(formando z)



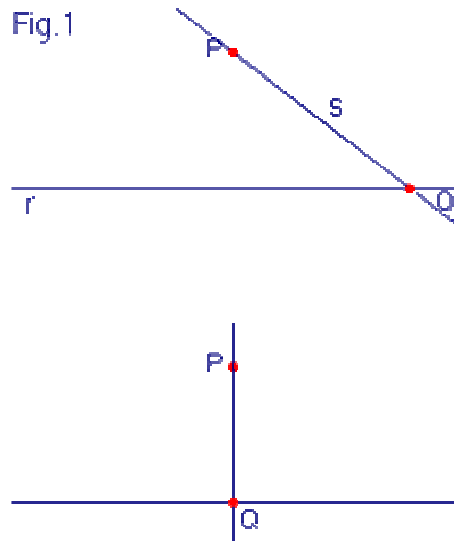
Il quinto postulato, però non era di intuizione immediata e Euclide cercò di dimostrarlo numerose volte, ma non essendo giunto a tale dimostrazione e ritenendolo vero, lo inserì tra i postulati, non potendone farne a meno.

L'imbarazzo di Euclide rispetto al quinto postulato venne raccolto anche da altri grandi matematici del passato. Molti di essi tentarono di dimostrarlo ma, (per esempio Posedonio e Proclo) gradualmente, si fece luce l'idea che ogni tentativo di dimostrazione costringeva comunque a sostituire il quinto postulato con altre proposizioni di partenza che dovevano essere assunte come vere.

Tutti questi tentativi ebbero esito negativo, ma consentirono sia uno sviluppo delle riflessioni attorno al metodo di indagine della matematica sia lo studio di possibili differenti geometrie.

## PUNTI ALL' INFINITO & NASCITA DI NUOVE GEOMETRIE

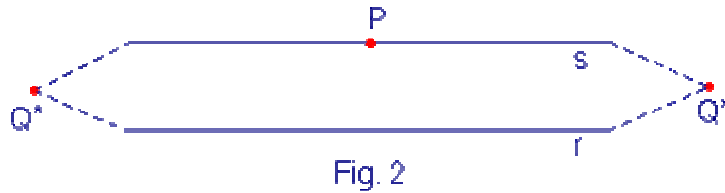
La retta  $s$  ruotando attorno a  $P$  incontra via via tutti i punti di  $r$ . Il punto  $Q$  si muove con continuità su  $r$ , si allontana sempre più a est e poi ricompare a ovest.



C'è una sola posizione di  $s$ , abbiamo detto, alla quale non corrisponde alcun punto  $Q$  su  $r$ .

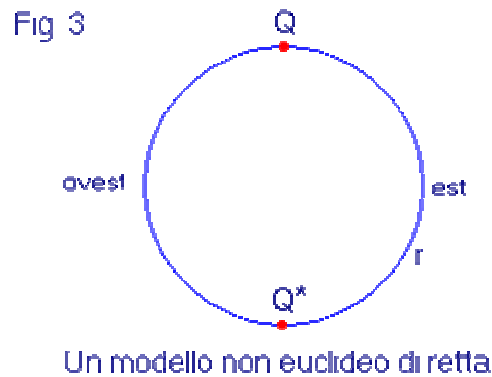
Ciò è in accordo con la nostra intuizione di rette parallele (e ciò viene assunto col quinto postulato). Ma, a una riflessione più attenta, ci accorgiamo che forse c'è qualcosa che può non convincere. Il punto  $Q$  si muove con continuità su  $r$  allontanandosi all'infinito verso est e poi, bruscamente, ricompare "infinitamente" lontano a ovest riprendendo il suo movimento continuo su  $r$ . Sarebbe bello immaginare che esista **un punto all'infinito** comune alle rette  $r$  ed  $s$ , chiamiamolo  $Q^*$ , che consenta a  $Q$  di evitare questo "salto", questa discontinuità.

$Q^*$  dovrebbe trovarsi infinitamente lontano a est e, nello stesso tempo, infinitamente lontano a ovest.



Se così fosse cambierebbero molte cose: due rette si incontrerebbero sempre, **non esisterebbero rette parallele**.

Inoltre le rette si comporterebbero in realtà come delle curve (e per di più come delle curve chiuse).



- Tutte le rette tra loro parallele avrebbero in comune uno stesso punto all'infinito
- Rette con diversa direzione individuerebbero diversi punti all'infinito.

Così nacque la geometria di Riemann ed in particolare si svilupparono la “*geometria sferica*” e la “*geometria ellittica*” . Quindi, analogamente a quanto visto prima, l’analisi dell’infinito ha rivoluzionato anche la geometria, dando l’input per la nascita di nuovi modelli che, insieme al vecchio modello euclideo, costituiscono un insieme di “geometrie” tutte distinte e non in contraddizione con le altre.

# **INDICE**

1. **L'INFINITO "POTENZIALE"**

I numeri naturali ed il "progressus in indefinitum"

I numeri razionali ed il "regressus in infinitum"

2. **LA MATEMATICA GRECA E L'INFINITO**

Pitagora e i segmenti incommensurabili

5. Achille e la tartaruga

La rettificazione della circonferenza

6. **GALILEI E L'INFINITO**

7. Il paradosso dei quadrati

Il paradosso della ruota

8. **LE SEZIONI DI DEDEKIND**

10. **CANTOR E I PARADOSSI DELL'INFINITO ATTUALE**

Un quadrato unitario ha tanti punti quanto un suo lato

11. Un cubo unitario ha tanti punti quanto un suo lato

12. **I NUMERI TRANSFINITI**

13. I numeri interi sono un insieme numerabile

I numeri razionali sono un insieme numerabile

16. Ipotesi del continuo

**LE ANTINOMIE**

Antinomia di Russel

17. Antinomia di Cantor (o della classe totale)

18. **L'INFINITO NELLA GEOMETRIA**

I postulati di Euclide

Il primo postulato

Il secondo postulato

19. Il terzo postulato

Il quarto postulato

20. Il quinto postulato

21. **PUNTI ALL'INFINITO E NASCITA DI NUOVE "GEOMETRIE"**

